UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

13 G 18 Bis A01
Durée : 4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (5 *points*).

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Soit K le point du plan tel que $OIKJ$ soit un carré.

Soit M un point quelconque de la droite (OK) différent de O et s la similitude plane directe de centre J qui transforme O en M. On note m l'affixe du point M, I' et M' les images respectives de I et de M par s.

1. Montrer que $|m-1| = |m-i|$ et que les complexes $(m-1)(m-i)$ et $m(1+i)$ sont imaginaires purs.

Indication : M étant un point de la première bissectrice différent de O, il existe un réel x non nul tel que $m = x + ix$. $3 \times 0,25$ *pt*

2. a. Vérifier que le rapport de s est $|m-i|$, calculer alors $M'I'$ en fonction m. $2 \times 0,25$ *pt*

b. Calculer le rapport de $s \circ s$. En déduire que $M'J = |m-i|^2$. $2 \times 0,25$ *pt*

c. Démontrer que $M'J = M'I'$ $0,5$ *pt*

3. a. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est $z' = (1+im)z + m$.

En déduire les vecteurs $\overrightarrow{II'}$ et $\overrightarrow{M'I'}$ ont pour affixes respectives $m(1+i)$ et $-i(m-i)(m-1)$.

$0,75 + 0,25 + 0,25$ *pt*

b. Prouver alors que I' est le projeté orthogonal de M' sur la droite (IK). $0,5$ *pt*

c. Déduire de la relation de la question 2 c. que lorsque le point M parcourt la droite (OK) privée du point O, le point M' appartient à une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

Placer toutes les données précédentes sur une figure.

$2 \times 0,5$ *pt*

Exercice 2 (4 *points*).

Dans un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$. Soit (Δ) la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$ et S un point de (Δ) distinct de A. On note I le projeté orthogonal de A sur (BS).

Pour tout point M du cercle $\mathcal{C}$ on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).

1. Placer les données précédentes sur une figure, (Δ) étant tracée verticalement. $0,5$ *pt*

2. Prouver que H appartient à la sphère Σ de diamètre $[AS]$. $0,5$ *pt*

3. Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B.

Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS). En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS). $2 \times 0,75$ *pt*

4. Montrer que H appartient au plan Π passant par I et orthogonal à la droite (BS).
$0,75\ pt$

5. Déterminer l'intersection Γ de la sphère Σ et du plan Π. $0,75\ pt$

PROBLEME (11 *points*).

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2.5 cm).

Partie A

1. a. Soit m un réel strictement positif. Déterminer en fonction de m, des réels a, b, c, α, β tels que pour tout réel x on ait :

$$\int_0^x u\mathrm{e}^{-mu}\,du = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{-mx} + \frac{1}{m^2} \text{ et } \int_0^x u^2\mathrm{e}^{-mu}\,du = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-mx} + \frac{2}{m^3}.$$

$2 \times 0,5\ pt$

b. Calculer alors $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\int_0^x u\mathrm{e}^{-mu}\,du$ et $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\int_0^x u^2\mathrm{e}^{-mu}\,du$. $2 \times 0,25\ pt$

c. Montrer que les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{u}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\,du \text{ et } g(x) = \int_0^x \frac{u^2}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\,du$$

sont positives, dérivables et croissantes sur $I = [0, +\infty[$.

Après avoir vérifié que $\forall u \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\mathrm{e}^u} \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}} \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^u}$, déduire du *b.* que, quand x tend vers $+\infty$, elles ont des limites respectives ℓ et s appartenant à $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et $[1, 2]$.

Indication : On admettra qu'une fonction continue, croissante et majorée sur $[0, +\infty[$, admet une limite finie à $+\infty$.

$1\ pt$

d. Montrer que la fonction f est paire (faire le changement de variable $t = -u$). $0,5\ pt$

2. En vue de l'étude d'éventuels points d'inflexions de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f dans le repère $\mathcal{R}$, montrer que la fonction h définie sur I par :

$$h(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x + (1 + x)\mathrm{e}^{-x}$$

est dérivable sur I et s'annule en un unique point x_0 appartenant à $]1;\ 1,3[$. $0,5\ pt$

3. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > x$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 1$.
$0,25 + 0,25\ pt$

b. Soit x un réel non nul. En appliquant le théorème des accroissements finis à f dans l'intervalle d'extrémités 0 et x, étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ et la première bissectrice.

En déduire que l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution 0. $0,5 + 0,25\ pt$

Partie B

1. a. Soit x un réel positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$f(x) - \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\int_0^x u\mathrm{e}^{-(2p+1)u}\,du = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{u\mathrm{e}^{-(2n+2)u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}\,du.$$

(On convient que $(-1)^0 = 1$.) $0,75\ pt$

En déduire que pour tout entier naturel n :

$$\left|\ell - \sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

(Utiliser la question 1 b. partie A)

Donner alors une valeur approchée de ℓ à 10^{-1}. $0,5+0,25$ *pt*

2. En procédant à une intégration par parties, vérifier que pour tout réel positif λ

$$\int_0^{\lambda}\Big(f(\lambda)-f(x)\Big)\,dx = g(\lambda).$$

En déduire que $g(\lambda)$ et s peuvent être interprétés comme aires de domaines que l'on déterminera. $3\times 0,25$ *pt*

3. Représenter la courbe C_f.

On prendra $x_0=1,2,\ f(x_0)=0,2$. On représentera en particulier l'asymptote horizontale, la tangente horizontale, les points d'inflexions et les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en ces points et le domaine plan dont une mesure de l'aire est $g(3)$.

NB. On rappelle que si une fonction est deux fois dérivable en un point x_0 et si sa dérivée seconde s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point de sa courbe d'abscisse x_0 est un point d'inflexion. 1 *pt*

4. Soit a un réel strictement positif. On pose $a_0=a$ et pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=f(a_n)$

a. Démontrer que la suite (a_n) est positive et monotone. $2\times 0,25$ *pt*

b. En déduire que la suite (a_n) est convergente. Calculer alors sa limite. $2\times 0,25$ *pt*

Partie C

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(0)=\ell \text{ et pour tout réel } x \text{ strictement positif } F(x)=f\big(\ln x\big).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} F(x)$.

Montrer que F est continue au point 0. $0,25+0,5$ *pt*

2. a. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$. $0,25$ *pt*

La fonction F est-elle dérivable au point 0 ? $0,75$ *pt*

b. Déduire du a. que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F(x)=\int_1^x \frac{\ln u}{1+u^2}\,du.$$

$0,25$ *pt*